Jakub Juránek
UČO 393110

1. V nějaké reálné bázi na vektorovém prostoru V_4 je dána kvadratická forma F. Určete její normovanou polární bázi, normální tvar rovnic, typ formy a transformační rovnice přechodu k normované polární bázi:

$$F(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 + 6x_3x_4 - 3x_4^2$$

$\mathbf{u} = (0, 1, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 : \qquad x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$\mathbf{v} = (1, 0, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 : &\qquad x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0 : &\qquad 2x_1 \qquad + 4x_3 = 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{w} = (0, 0, 0, 1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 : &\qquad x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad = 0 \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0 : &\qquad 2x_1 \qquad + 4x_3 \qquad = 0 \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0 : &\qquad -3x_1 \qquad + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} && x_4 &= 6t \\ 3x_3 = x_4 = 6t &\Rightarrow & x_3 &= 2t \\ 2x_2 = -3x_3 = -6t &\Rightarrow & x_2 &= -3t \\ x_1 = -2x_3 &\Rightarrow & x_1 &= -4t \end{aligned}$$

$\mathbf{ch} = (-4, -3, 2, 6)$

$$F(\mathbf{ch}) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 & 17 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 102$$

V polární bázi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{ch}$:

$$F(\mathbf{x}) = -2y_1^2 + 6y_2^2 - 3y_3^2 + 102y_4^2$$

Normovaná polární báze: $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v}$, $\frac{1}{\sqrt{102}}\mathbf{ch}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{w}$

$$\begin{array}{rclrcl} \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v} & = & \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) & \frac{1}{\sqrt{102}}\mathbf{ch} & = & \left(-\frac{2\sqrt{102}}{51}, -\frac{\sqrt{102}}{34}, \frac{\sqrt{102}}{51}, \frac{\sqrt{102}}{17}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u} & = & \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) & \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{w} & = & \left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}$$

Normální tvar:

$$F(\mathbf{x}) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2$$

Typ formy: indefinitní

Transformační rovnice přechodu k normované polární bázi:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{102}}{51} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{102}}{34} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{102}}{51} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{17} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

2. V ortonormální bázi na euklidovském vektorovém prostoru V_3 je dána kvadratická forma F. Pomocí ortonormálních transformací určete kanonický tvar rovnic a typ formy:

$$F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 0$$

Kanonický tvar:

$$F(\mathbf{x}) = y_1^2 + 3y_2^2$$

Typ formy: pozitivně semidefinitní